

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 27.06.2023

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C, M_C .

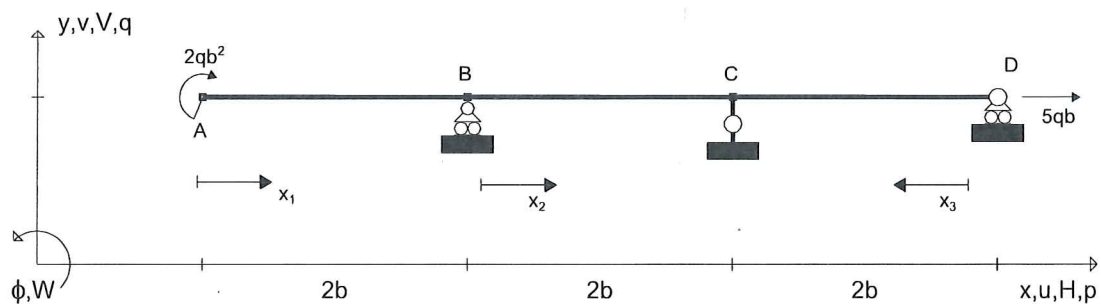
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento del punto A, v_A

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 27.06.23*001



EQ. DI CONGIUNTA: $\Delta\varphi_C = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

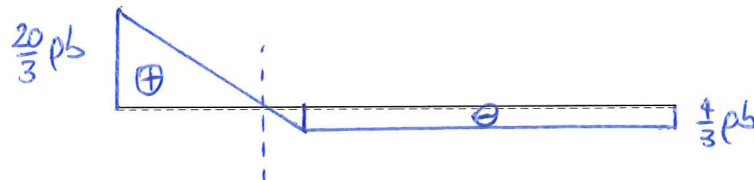
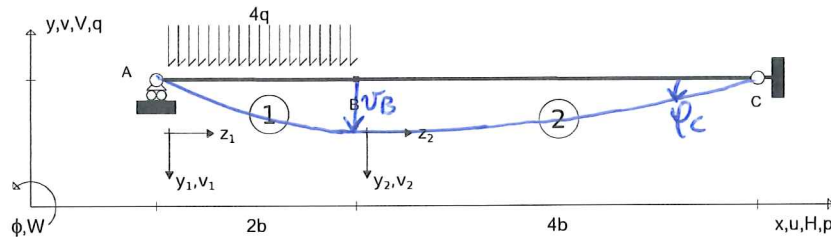
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

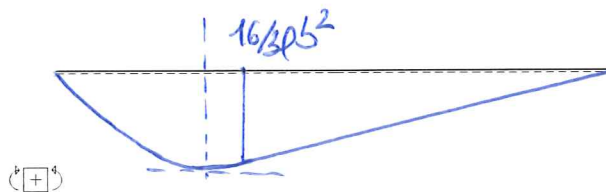
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 27.06.23*001



$\uparrow \oplus \downarrow$



$\oplus \downarrow$

$$V_A (\uparrow) = \frac{20}{3} pb; H_C (\rightarrow) = 0; V_C (\uparrow) = \frac{4}{3} pb;$$

$$N_{AB} = 0; T_{AB} = \frac{20}{3} pb - 4qz_1; M_{AB} = \frac{20}{3} pbz_1 - 2qz_1^2;$$

$$N_{BC} = 0; T_{BC} = -\frac{4}{3} pb; M_{BC} = \frac{16}{3} pb^2 - \frac{4}{3} pbz_2;$$

$$\text{c.c in } A = v_1(z_1=0)=0; \text{ c.c in } B = v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); v_1'(z_1=2b)=v_2'(z_2=0);$$

$$\text{c.c in } C = v_2(z_2=4b)=0;$$

$$v_1(z_1) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{10}{3} pbz_1^3 + \frac{1}{6} qz_1^4 + \frac{100}{3} pb^3 z_1 \right); v_1'(z_1) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{10}{3} pbz_1^2 + \frac{2}{3} qz_1^3 + \frac{100}{3} pb^3 \right);$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{8}{3} pb^2 z_2^2 + \frac{2}{3} qbz_2^3 + \frac{28}{3} pb^3 z_2 + \frac{16}{3} pb^4 \right); v_2'(z_2) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{16}{3} pb^2 z_2 + \frac{2}{3} qbz_2^2 + \frac{28}{3} pb^3 \right);$$

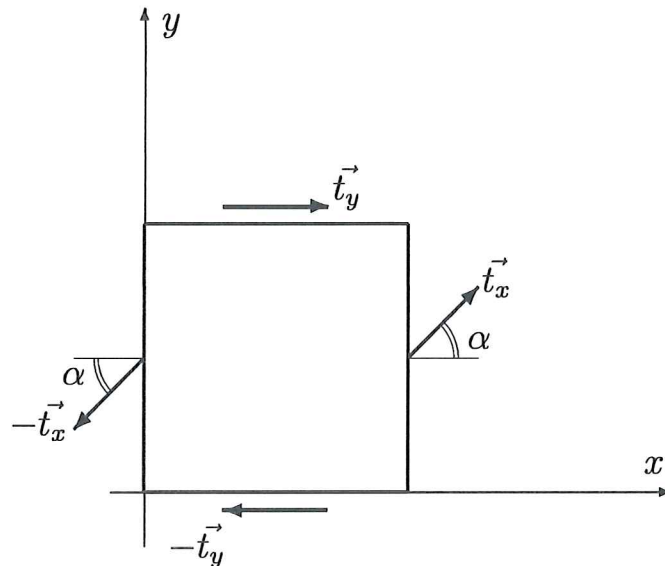
$$v_B = \frac{16 pb^4}{EI} (\downarrow); \varphi_C = -\frac{68 pb^3}{3EI} (\downarrow);$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -30^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -1/2$; $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 60$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

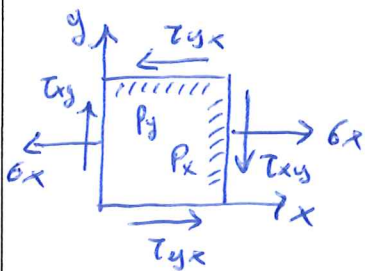
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = \frac{51,961}{\sqrt{3}} \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -30,000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 65,667 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -13,705 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 39,686 \text{ (MPa)};$$

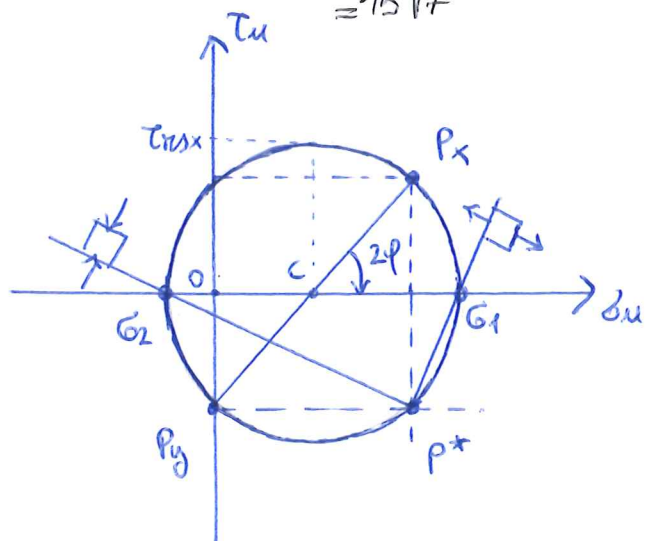
cerchio di Mohr:

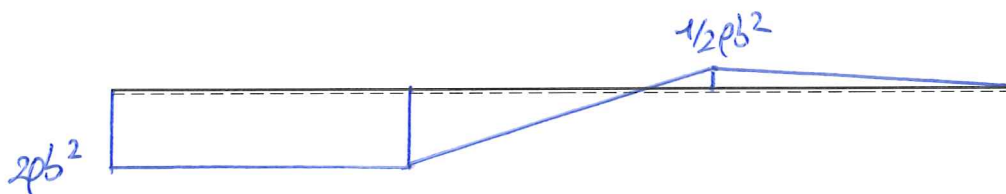
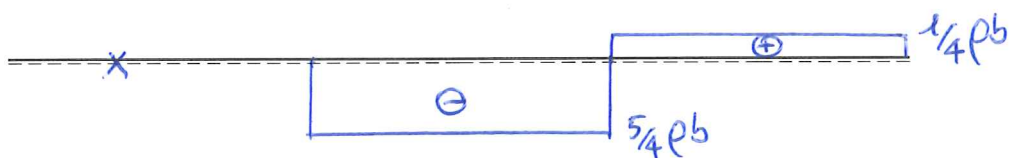
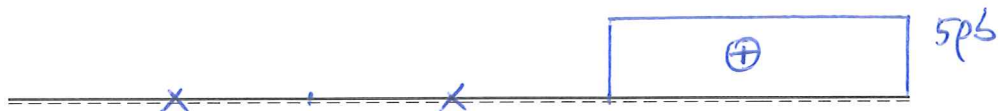


$$P_x = (51,961; 30,000)$$

$$P_y = (0,000; -30,000)$$

$$\varphi = -24,553 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \dots -5/4 pb \dots; H_C(\Rightarrow) = \dots -5pb \dots; V_C(\uparrow) = \dots 3/2 pb \dots; V_D(\uparrow) = \dots -1/4 pb \dots; M_C(\curvearrowright) = \dots -1/2 pb^2 \dots; \\
 N_{AB} &= \dots // \dots; T_{AB} = \dots // \dots; M_{AB} = \dots 2pb^2 \dots; \\
 N_{BC} &= \dots // \dots; T_{BC} = \dots -5/4 pb \dots; M_{BC} = \dots 2pb^2 - 5/4 pb \times 2 \dots; \\
 N_{DC} &= \dots 5pb \dots; T_{DC} = \dots 1/4 pb \dots; M_{DC} = \dots -1/4 pb \times 3 \dots; \\
 v_A &= \dots 13pb^4/3EI \dots (\uparrow) \dots;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 27.06.2023

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

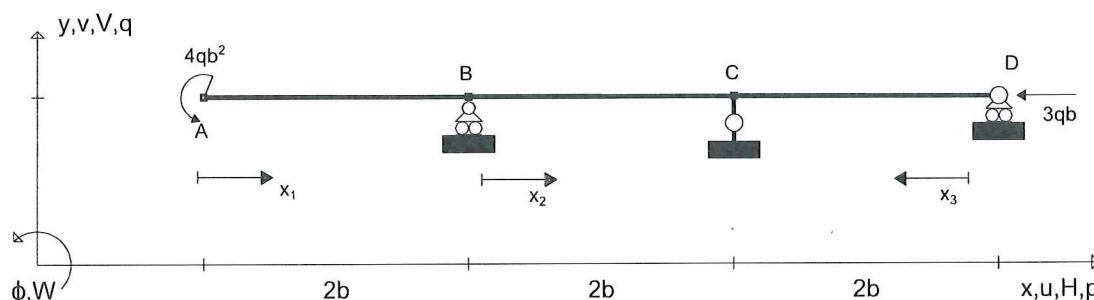
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento del punto A , v_A

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 27.06.23*002



EQ. DI GNGWENZA

$$\Delta \phi_{(0)} = 0$$

Esercizio n. 2 (7 punti)

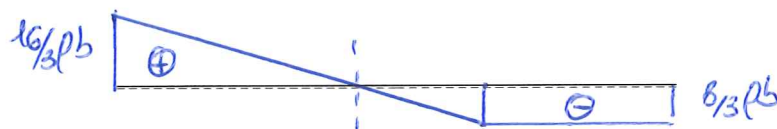
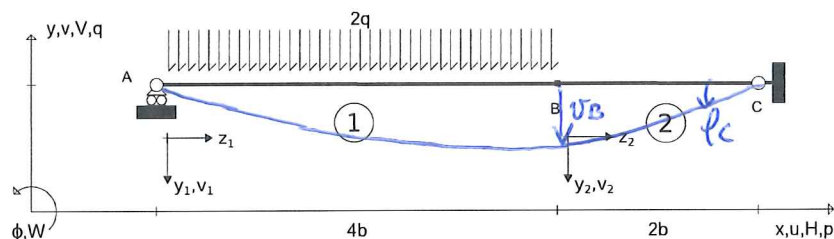
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

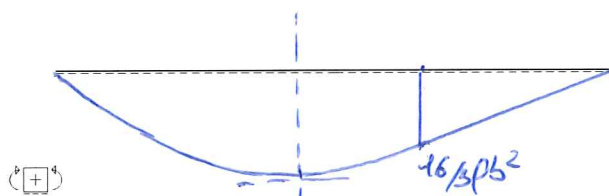
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 27.06.23*002



↑ ⊕ ↓



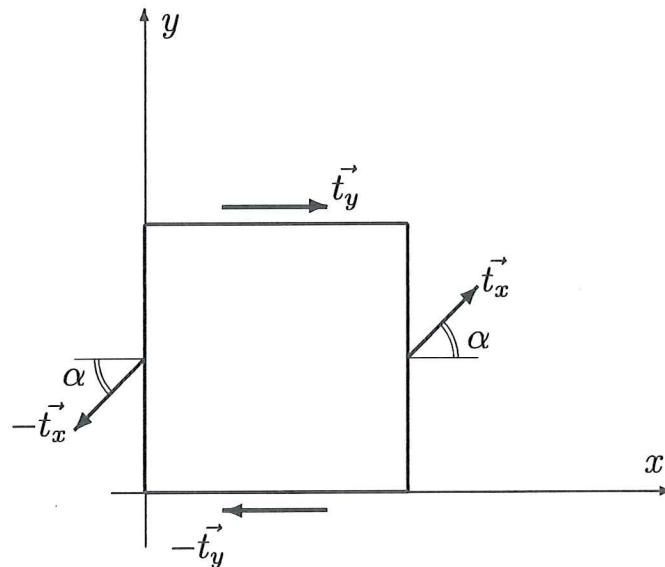
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{16}{3}pb; & H_C (\rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= \frac{8}{3}pb; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= \frac{16}{3}pb - 2qz_1; & M_{AB} &= \frac{16}{3}pbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -\frac{8}{3}pb; & M_{BC} &= \frac{16}{3}pb^2 - \frac{8}{3}pbz_2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=4b)=v_2(z_2=0); & v_1'(4b)=v_2'(z_2=0) &= 0; \\
 \text{c.c in } C &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{6} \left(-\frac{8}{3}pbz_1^3 + \frac{1}{2}qz_1^4 + \frac{128}{3}pb^3z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{3}pbz_1^2 + \frac{1}{3}qz_1^3 + \frac{128}{3}pb^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{6} \left(-\frac{8}{3}pb^3z_2^2 + \frac{4}{3}qz_2^3 - \frac{64}{3}pb^3z_2 + \frac{64}{3}pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{16}{3}pb^3z_2 + \frac{4}{3}qz_2^2 - \frac{64}{3}pb^3 \right); \\
 v_B &= \frac{64qb^4}{3E} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{112pb^3}{3E} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -60^\circ$ (sicché $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$; $\cos \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 60$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

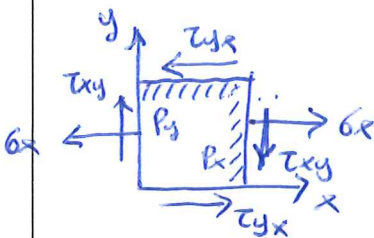
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = +30,000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -51,861 \text{ (MPa)};$$

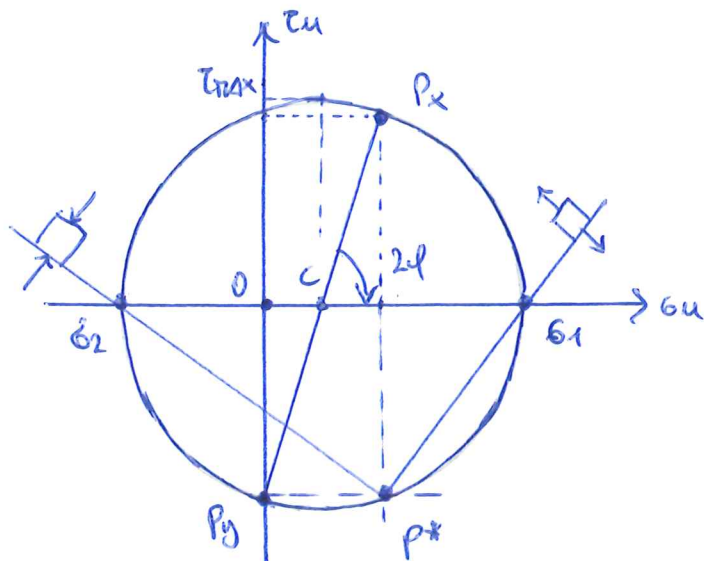
$$\sigma_1 = 69,083 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -39,083 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 54,083 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

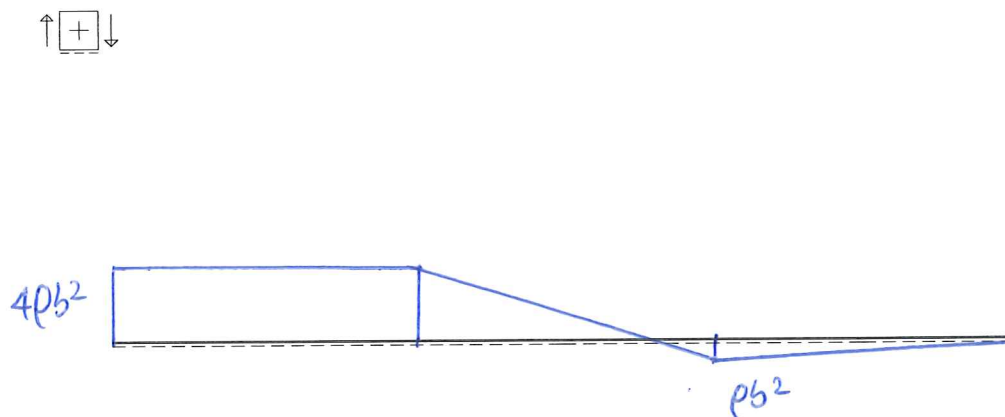
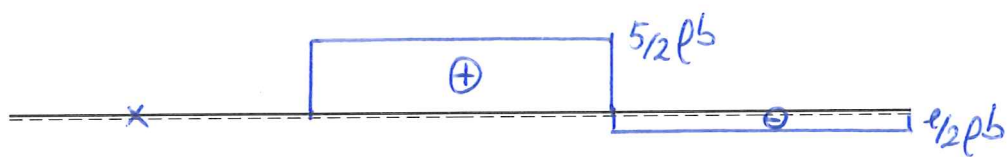
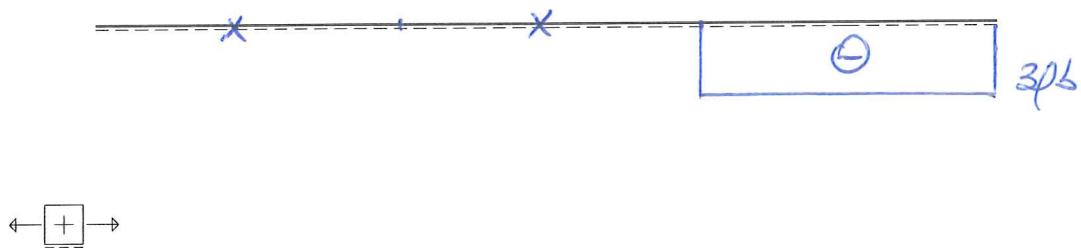


$$P_x = (30,000; 51,861)$$

$$P_y = (0,000; -51,861)$$



$$\varphi = -36,84 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \dots \frac{5}{2}pb \dots; H_C(\rightarrow) = \dots 3pb \dots; V_C(\uparrow) = \dots -3pb \dots; V_D(\uparrow) = \dots \frac{1}{2}pb \dots; M_C(\curvearrowright) = \dots pb^2 \dots; \\
 N_{AB} &= \dots \text{"/} \dots; T_{AB} = \dots \text{"/} \dots; M_{AB} = \dots -4pb^2 \dots; \\
 N_{BC} &= \dots \text{"/} \dots; T_{BC} = \dots \frac{5}{2}pb \dots; M_{BC} = \dots -4pb^2 + \frac{5}{2}pb \times 2 \dots; \\
 N_{DC} &= \dots -3pb \dots; T_{DC} = \dots -\frac{1}{2}pb \dots; M_{DC} = \dots \frac{1}{2}pb \times 3 \dots; \\
 v_A &= \dots -\frac{38pb^4}{3EI} \dots (\downarrow) \dots;
 \end{aligned}$$